

3 Momente

11. Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$, sodaß $\text{Var}(X) < \infty$. Zeigen Sie, daß die Funktion $\phi(a) = E((X - a)^2)$ ihr Minimum bei $a = E(X)$ annimmt. (Hinweis: Differenzieren)
12. Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und Dichte $f(x)$. Zeigen Sie, daß

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

ist. (Hinweis: Partiiell Integrieren.)

Für eine reellwertige Zufallsvariable X heisst die Funktion

$$M(t) = E(e^{tX}) \quad (t \in \mathbf{R})$$

die *momenterzeugende Funktion der Zufallsvariable X* . Gehorcht X einer bestimmten Verteilung (z.B. Gleichverteilung auf $[a, b]$), so heisst $M(t)$ auch die *momenterzeugende Funktion der Verteilung* von X (z.B. der Gleichverteilung auf $[a, b]$).

13. Berechnen Sie die momenterzeugenden Funktionen für die
 - (a) Gleichverteilung auf $[a, b]$ ($a < b$),
 - (b) Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 > 0$.
 - (c) Binomialverteilung mit Parametern $n = 1$ und $p \in (0, 1)$, und die
 - (d) Binomialverteilung mit Parametern $n \geq 1$ und $p \in (0, 1)$.
14. Sei X eine Zufallsvariable mit momenterzeugender Funktion $M(t) = E(e^{tX})$. Zeigen Sie, daß für $k \geq 0$ das k -te Moment von X , $E(X^k)$ durch $M^{(k)}(0)$ gegeben ist. Dabei bezeichnet $M^{(k)}(t)$ die k -te Ableitung von $M(t)$ an der Stelle t .
15. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M(t) = E(e^{tx})$ für die
 - (a) Geometrische Verteilung,
 - (b) Negative Binomialverteilung,
 - (c) Poisson-Verteilung, sowie für die
 - (d) Gamma-Verteilung.

16. Es seien X und Y unabhängig und binomialverteilt, X mit Parametern n und p , Y mit Parametern m und p . Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$.
(Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\sum_{k=0}^v \binom{n}{k} \binom{m}{v-k} = \binom{m+n}{v}$ für $m \geq 1, n \geq 1, 0 \leq v \leq m + n$.)