Übungzettel (4) Beispiele bis 23.4.2007

8. **Kolmogorov-Chapman equations**

   Zeigen Sie, dass die $(m+n)-$Schritt Übergangsmatrix $\mathrm{P}^{(n+m)}$ einer stationären Markovkette mit diskretem Wertebereich $\mathcal{X}$ durch $\mathrm{P}^{(n+m)} = \mathrm{P}^{(n)}\mathrm{P}^{(m)}$ (Matrixmultiplikation) gilt, d.h. beweisen Sie

   $$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in\mathcal{X}} p_{ik}^{(n)}\, p_{kj}^{(m)}$$

   Hinweise

   (a) $p_{ij}^{(n+m)} = P(X_{n+m} = j|X_0 = i) = \sum_{k\in\mathcal{X}} P(X_{n+m} = j, X_m = k|X_0 = i)$

   (b) Zeigen Sie

   $$\frac{P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_n = i)}{P(X_0 = i)} = P(X_n = k|X_0 = i)\, P(X_{n+m} = j|X_n = k, X_0 = i)$$

   (c) $P(X_{n+m} = j|X_m = i) = P(X_n = j|X_0 = i)$ (stationär/zeit-homogen!)

9. **Stationäre Verteilung vom Ehrenfest Modell**

   Wir betrachten N Moleküle, die auf die Behälter A und B aufgeteilt sind. Zu jedem Zeitschritt wird eines von den N Molekülen zufällig (gleichmäßig) ausgewählt und in den jeweils anderen Behälter gegeben. Bezeichne X_n die Anzahl der Moleküle im Behälter A zum Zeitpunkt n. X_n ist dann eine Markovkette mit Wertebereich $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$.

   (a) Schreiben Sie die Übergangsmatrix P für allgemeines N an. Berechnen Sie dazu erst $P(X_{n+1} = i + 1|X_n = i)$ und $P(X_{n+1} = i - 1|X_n = i)$.

   (b) Berechnen Sie die stationäre Verteilung $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ für $N = 3$.