UE Statistik III (Lineare Modelle), WS 2006/7

Übungsskriptum

I. Momente von Stichproben und Zufallsvariablen

Verwenden Sie für die Lösung der folgenden Aufgaben das Handout 'Moments and Sample Moments':

1. a) Für die Stichprobenkovarianz $s_{x,y}$ von $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ gilt: 1

$$s_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}.$$

   b) Für $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ bezeichtet αx die Stichprobe $\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n$, und βy die Stichprobe $\beta y_1, \ldots, \beta y_n$. Damit ist $s_{\alpha x, \beta y} = \alpha\beta s_{x,y}$. 1

   Für die Stichprobenkorrelation hingegen gilt, falls $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $s_{x,x} > 0$, und $s_{y,y} > 0$, dass

$$r_{\alpha x, \beta y} = r_{x,y}.$$

   c) Wieso ist, falls $s_{x,x} > 0$ und $s_{y,y} > 0$, $-1 \leq r_{x,y} \leq 1$? 1

2. Es seien X und Y Zufallsvariable mit $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$.

   a) Für die Kovarianz $\sigma_{X,Y}$ von X und Y gilt: 1

$$\sigma_{X,Y} = E(X(Y - \mu_Y)) = E((X - \mu_X)Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

   b) Für $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ist 1

$$\sigma_{\alpha X, \beta Y} = \alpha\beta\sigma_{X,Y}.$$

   Für die Korrelation hingegen gilt: ist $\sigma_{X,X} > 0$ und $\sigma_{Y,Y} > 0$, so ist, für $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\rho_{\alpha X, \beta Y} = \rho_{X,Y}.$$

   c) Wieso ist $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$, falls $\sigma_{X,X} > 0$ und $\sigma_{Y,Y} > 0$? 1

3. a) Sind $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert mit $E(X_1) = \ldots = E(X_n) = 0$, so ist 1

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2).$$

b) Sind weiters $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist 1

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \mathrm{Var}(X_i).$$

II. Lineare Ein- und Zweivariablen Modelle

In den folgenden 3 Beispielen sei das Modell $y_i = a + bx_i + u_i$ mit den Standardannahmen gegeben (siehe Handout 'Regression Model and Assumptions').

4. a) Weshalb wird $\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$ durch die LS-Schätzer $\hat{a}$ und $\hat{b}$ minimiert? 2

   b) Warum sind diese Schätzer im gegebenen Modell unverzerrt? 2

5. Welche Beziehungen gelten zwischen ESS, TSS und RSS? Warum gelten diese Beziehungen? 2

6. Gegeben seien die folgenden Daten

x:	5	6	7	8	9	10	11	12	13	40
y:	1	2	4	2	3	5	7	6	9	10

   a) Berechnen Sie die LS-Schätzer $\hat{a}$ und $\hat{b}$ für das Modell $y_i = a + bx_i + u_i$. 1

   b) Veranschaulichen Sie die Einpassung der Regressionsgeraden in den Punktschwarm durch eine Zeichnung. 1

   c) Ermitteln und interpretieren Sie die Stichprobenkorrelation $r_{x,y}$. 1

Zur geometrischen Interpretation des LS-Schätzers:

Betrachten Sie in den folgenden Beispielen das Modell $y_i = a + bx_i + u_i$ für $i = 1, \ldots, n$ in Vektor-Schreibweise: für $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$, $\vec{e} = (1, \ldots, 1)'$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, und $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)'$ ist

$$\vec{y} = a\vec{e} + b\vec{x} + \vec{u}.$$

Die mit Hilfe der LS-Schätzer berechneten Werte $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$, sowie die Residuen $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n$ lassen sich entsprechend als Vektoren schreiben: $\vec{\hat{y}} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)'$, und $\vec{\hat{u}} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)' = \vec{y} - \vec{\hat{y}}$.

7. Gegeben seien die Daten

$$\begin{array}{lccc} x: & 0 & 1 & 2 \\ y: & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

zu dem Modell $y_i = a + bx_i + u_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

a) Fertigen Sie im $\mathbb{R}^3$ eine Zeichnung der Punkte $\vec{e} = (1,1,1)'$, $\vec{x} = (0,1,2)'$, $\vec{y} = (0,1,1)'$, und des durch die LS-Schätzer berechneten Punktes $\vec{\hat{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)'$ an. 1

b) Berechnen Sie die Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y} - \vec{\hat{y}}$, sowie zwischen $\vec{e}$ und $\vec{y} - \vec{\hat{y}}$. 1

c) Zeigen Sie, wie die Beobachtungen aus Punkt b) mit den Normalgleichungen zusammenhängen. 2

8. Es sei $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sogenanntes *Orthonormalsystem*, d.h.

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei weiters $E := \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$ der von diesen Vektoren aufgespannte lineare Teilraum von $\mathbb{R}^n$ und $\vec{p}$ ein beliebiger Vektor im $\mathbb{R}^n$.

a) Finde jenen Vektor $\vec{\hat{p}} \in E$, der minimalen Abstand zu $\vec{p}$ hat. 2

b) Zeigen Sie, dass 2

$$\vec{p} - \vec{\hat{p}} \perp \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k.$$

Das bedeutet zusammen mit a), dass man $\vec{p}$ orthogonal zerlegt hat in $\vec{\hat{p}} \in E$ und $\vec{p} - \vec{\hat{p}} \in E^\perp$, wobei $E^\perp$ definiert ist als die Menge jener Vektoren im $\mathbb{R}^n$, die normal auf alle Vektoren aus E stehen, also

$$E^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ für alle } \vec{v} \in E\},$$

und *orthogonales Komplement zu E* heißt.

c) Zeige, dass die obige orthogonale Zerlegung 2

$$\vec{p} = \vec{\hat{p}} + (\vec{p} - \vec{\hat{p}})$$

im folgenden Sinne eindeutig ist: Sei $\vec{p} = \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{q} \in E$, $\vec{r} \in E^\perp$ eine weitere orthogonale Zerlegung, dann gilt bereits, dass $\vec{q} = \vec{\hat{p}}$ und $\vec{r} = \vec{p} - \vec{\hat{p}}$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\langle \vec{p}, \vec{v} \rangle$ für $\vec{v} \in E$, das eine Mal mit $\vec{p} = \vec{\hat{p}} + (\vec{p} - \vec{\hat{p}})$ und das andere Mal mit $\vec{p} = \vec{q} + \vec{r}$. Beachte dann, dass $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ stets $\vec{v} = 0$ impliziert.

9. Zu dem Modell $\vec{y} = a\vec{e} + b\vec{x} + \vec{u}$ mit $\vec{e} = (1, \ldots, 1)'$ seien die Daten $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass der durch die LS-Schätzer gegebene Punkt $\vec{\hat{y}} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)'$ in der von $\vec{x}$ und $\vec{e}$ aufgespannten Ebene liegt. 1

   b) Zeigen Sie, dass $\vec{\hat{y}}$ von allen Punkten dieser Ebene den kürzesten Abstand zu $\vec{y}$ hat. (Hinweis: Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{y} - \vec{\hat{y}}$ orthogonal ist zu $\vec{e}$ und zu $\vec{x}$, und argumentieren Sie mit den Resultaten aus 8.) 2

10. Wie lassen sich, in Anbetracht von Aufgaben 8 und 9 Formeln wie $\overline{\hat{u}} = \frac{1}{n}\vec{e}\,'\vec{\hat{u}} = 0$, $s_{x,\hat{u}} = 0$, $s_{\hat{y},\hat{u}} = 0$, oder $TSS = ESS + RSS$ geometrisch interpretieren? 2

    Hinweis: Die Formel $TSS = ESS + RSS$ folgt aus dem Satz von Pythagoras. Beachten Sie dabei, dass $\vec{\hat{u}}$ orthogonal auf $\vec{e}$ steht.

    In den folgenden Aufgaben sei das homogene (d.h. Intercept ist 0) Modell $y_i = bx_i + u_i$ gegeben. Weiters gelte $E(u_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma^2$, $E(u_i u_j) = 0$ und x_i nicht zufällig.

11. a) Für welchen Wert $\tilde{b}$ ist $\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{b}x_i)^2$ minimal? Wann ist dieses Minimum eindeutig? 1

    b) Nehmen Sie an, das obige Minimum sei wohldefiniert. Zeigen Sie, dass der Schätzer $\tilde{b}$ im gegebenen Modell unverzerrt ist und bestimmen Sie dessen Varianz. Vergleichen Sie mit der Varianz des Schätzers $\hat{b}$ aus Beispiel 4 (siehe Handout 'Statistical Properties of OLS-Estimators') 1

    c) Weiters sei $\overline{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$, und für $i = 1, \ldots, n$ sei $\tilde{y}_i = \tilde{b}x_i$ und $\tilde{u}_i = y_i - \tilde{y}_i$. Überprüfen Sie, ob in diesem Modell die Beziehung 2

    $$\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i^2$$

    gilt.

    Hinweis: Gehen Sie so vor wie in Bsp. 5 und verwenden Sie die first order moment condition (FOC) aus Punkt a).

12. a) Formulieren und 1

b) beweisen Sie das Gauß-Markov Theorem für den Kleinstquadrateschätzer $\tilde{b}$ des homogenen Modells. Weisen Sie darauf hin, an welchen Stellen Sie die Voraussetzungen des Satzes verwenden. 2

Hinweis: Übertragen Sie die Schritte im Beweis für das inhomogene Modell.

13. Betrachten Sie im Modell $y_i = bx_i + u_i$ unter den Standardannahmen die Schätzer $\check{b} = \overline{y}/\overline{x}$ (mit $\overline{x} \neq 0$), $\tilde{b} = \overline{xy}/\overline{xx}$, sowie $\hat{b} = (\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y})/(\overline{xx} - \overline{x}\,\overline{x})$.

(a) Sind diese Schätzer linear? 1

(b) Sind diese Schätzer unverzerrt? 1

(c) Welche Aussagen können Sie über die Varianzen der Schätzer $\check{b}$, $\tilde{b}$ und $\hat{b}$ mit Hilfe des Gauß-Markov Theorems treffen (ohne die Varianzen tatsächlich auszurechnen)? 1

(d) Berechnen Sie die Varianzen der Schätzer $\check{b}$, $\tilde{b}$ und $\hat{b}$. 1

(e) Welcher der Schätzer $\check{b}$, $\tilde{b}$ und $\hat{b}$ ist der beste lineare unverzerrte Schätzer für b im Modell $y_i = bx_i + u_i$ (unter den Standardannahmen und ohne Zusatzinformation)? 1

(f) Welcher der Schätzer $\check{b}$, $\tilde{b}$ und $\hat{b}$ ist der beste lineare unverzerrte Schätzer für b im Modell $y_i = a + bx_i + u_i$ (unter den Standardannahmen und ohne Zusatzinformation)? 1

14. Sei $\tilde{b}$ wie in Aufgabe 11. Weiters seien die Daten

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y :	2.3	3.7	5.2	6.0	8.15	15.53	11.3	12.9	14.5	15.9

gegeben.

a) Berechnen Sie $\tilde{b}$, $\tilde{u}_i = y_i - \tilde{b}x_i$, sowie $\sum_{i=1}^{10} \tilde{u}_i$. 1

b) Berechnen Sie zu den Daten und unter der Annahme, dass $y_i = a + bx_i + u_i$ ist, die LS-Schätzer $\hat{a}$ und $\hat{b}$, sowie $\hat{u}_i$ und $\sum_{i=1}^{10} \hat{u}_i$. 1

c) Vergleichen Sie die Werte von $\sum_{i=1}^{10} \tilde{u}_i$ und $\sum_{i=1}^{10} \hat{u}_i$. 1
Vergleichen Sie die Werte von $\sum_{i=1}^{10} \tilde{u}_i^2$ und $\sum_{i=1}^{10} \hat{u}_i^2$.

III. Wiederholung lineare Algebra

15. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie JA', JB, 1

b) AJ und BJ. 1

Wie kann man in den Punkten a) und b) die Multiplikation mit J interpretieren?

c) Berechnen Sie auch AB und schreiben Sie jede Zeile (Spalte) dieser Matrix als Linearkombination der Zeilen von B (Spalten von A). 1

16. a) Berechnen Sie $(AB)'$, $B'A'$, 1

b) $(AC)'$ und $C'A'$ für 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

17. Beschreiben Sie die Begriffe 'positiv definit', 'nicht-negativ definit', 'negativ definit', und 'indefinit'. Teilen Sie dazu die Menge aller $n \times n$ Matrizen in geeignete Klassen ein (Venn-Diagramm). 1

18. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie sowohl mit Hilfe der Hauptminoren als auch mit Hilfe der Eigenwerte, dass die Matrix A positiv definit ist. 1

b) Bestimmen Sie Eigenvektoren der Länge 1 zu den Eigenwerten der Matrix A. 1

c) Überprüfen Sie anhand dieses Beispiels die allgemeine Regel, dass die 1 zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix gehörende Eigenvektoren stets paarweise orthogonal sind.

d) Zeigen Sie allgemein, dass zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ einer symmetrischen Matrix A gehörende Eigenvektoren v_1, v_2 stets paarweise orthogonal sind. 2

Hinweis: Zeigen Sie zunächst unter Verwendung der Beziehung $\langle v, w\rangle = v'w$, dass für eine symmetrische $n \times n$–Matrix A die folgende Gleichung gilt:

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$$

19. Zeigen Sie, dass jedes Diagonalelement b_{ii} positiv ist, falls die Matrix B positiv definit ist. (Hinweis: drücken Sie b_{ii} in der Form $x'Bx$ für geeignetes x aus.) 2

20. Zeigen Sie, dass für zwei beliebige, geeignet dimensionierte Matrizen A, B gilt:

a) $\mathrm{spur}(A + B) = \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B)$ 1
$\mathrm{spur}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{spur}(A)$

b) $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$. 1

21. Zeigen Sie, dass es unmöglich ist, zwei Matrizen A und B zu finden, sodass gilt: $AB - BA = I$. (Hinweis: Verwenden Sie 20.) 1

22. Es seien 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Überzeugen Sie sich, dass gilt: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Verwenden Sie in den nächsten 3 Aufgaben u.a. folgendes Resultat: Jede symmetrische $n \times n$ Matrix Ω besitzt n paarweise orthogonale Eigenvektoren $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$. Normiert man diese n Vektoren und fasst sie zu einer Matrix $U = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ zusammen, so gilt:

$$U'U = I,\ U' = U^{-1}, \text{ und } \Omega = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\,U',$$

wobei $\vec{u}_i$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist und $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix mit Eintragungen λ_i in der Hauptdiagonale bezeichnet.

23. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

a) Ist eine Matrix idempotent, so können Ihre Eigenwerte nur die Werte 0 oder 1 annehmen. 2

Hinweis: Wegen der Einleitung gibt es zu jeder symmetrischen $n \times n$-Matrix Ω eine invertierbare Matrix U, so dass $U'\Omega U$ eine Diagonalmatrix ist. Zeige zunächst folgende Aussage: 'Wenn Ω idempotent ist, dann auch $U'\Omega U$.'

b) Für jede symmetrische, idempotente Matrix A gilt $\text{spur}(A) = \text{rang}(A)$. 2

Hinweis: Führen Sie folgende Rechnung fort:

$$\text{spur}(A) = \text{spur}(I_n A) = \text{spur}(UU' \cdot A) = \dots$$

Beachten Sie dann, dass die Spur und der Rang für Diagonalmatrizen übereinstimmen.

c) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme von b) den Rang der Matrix 2

$$M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

wobei X eine $n \times k$–Matrix mit $\text{rang}(X) = k$ ist.

24. a) Zeigen Sie, dass zu jeder symmetrischen und nichtnegativ definiten Matrix Ω eine Matrix R existiert, sodass gilt: $\Omega = RR'$. 2

Hinweis: Wegen der Einleitung gilt $\Omega = U\Lambda U'$ (warum?). Versuchen Sie jetzt den rechten Ausdruck in ein Produkt der Form RR' zu zerlegen.

b) Ist Ω symmetrisch und positiv definit, dann ist auch R positiv definit. Ist R invertierbar? 2

Hinweis: Beachten Sie dass aus A invertierbar und P positiv definit folgt, dass AP positiv definit ist. Man wende das auf den Faktor R aus der Zerlegung in a) an.

UE Statistik III (Lineare Modelle), WS 2006/7

Aufgaben Teil II (25-40)

IV. Das allgemeine Modell in Matrixschreibweise

25. a) Formulieren Sie das Regressionsmodell $y_i = a + bx_i + u_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ in Matrix-Schreibweise $y = X\beta + u$. 1

    b) Bestimmen Sie die Formeln für die LS-Schätzer für a und b aus der Formel $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$. Weshalb ist $X'X$ invertierbar? 2

    c) Zeigen Sie insbesondere, dass sich die LS-Schätzer allein durch die Stichprobenmittel $\overline{x}$ und $\overline{y}$, sowie durch die Stichprobenvarianzen und -kovarianzen $s_{x,x}$, $s_{y,y}$ und $s_{x,y}$ ausdrücken lassen. Die Vektorkomponenten $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ stimmen also mit den Schätzern $\hat{a}, \hat{b}$ aus Aufgabe 4 überein. 1

26. Zeigen Sie, daß der LS-Schätzer $\hat{\beta}$ für β im linearen Modell $y = X\beta + u$ die

    a) Bedingung 1. Ordnung, 1

    b) Bedingung 2. Ordnung für ein Minimum von $||y - X\beta||$ erfüllt. 2

    Leiten Sie dazu zunächst jeweils die Bedingung 1. bzw. 2. Ordnung her. Zeigen Sie bei b), dass $X'X$ genau dann positiv definit ist, wenn $\text{rang}(X) = k$ gilt.

27. a) Prüfen Sie folgende Eigenschaften des LS-Schätzers $\hat{\beta}$ für β im linearen Modell $y = X\beta + u$, wobei $\beta \in \mathbf{R}^k$, und X eine $n \times k$-Matrix von vollem Spaltenrang sei. 1

$$\begin{aligned} X'\hat{u} &= 0, \\ \hat{y}'\hat{u} &= 0, \\ \hat{\beta} &= \beta + (X'X)^{-1}X'u. \end{aligned}$$

    Wo verwendet man, dass X Rang k hat?

    b) Welche dieser Eigenschaften gelten auch im einfachen Modell $y_i = a + bx_i + u_i$? 1

28. Betrachten Sie das lineare Modell $y = X\beta + u$, wobei $\beta \in \mathbf{R}^k$, und X eine $n \times k$–Matrix von vollem Spaltenrang sei.

a) Zeigen Sie, dass sich der Residuenvektor $\hat{u}$ darstellen lässt als $\hat{u} = Mu$. 1

b) Zeigen Sie, dass die Matrix M folgende Eigenschaften hat: 1

$$\begin{aligned} MX &= 0, \\ M' &= M, \\ M^2 &= M, \end{aligned}$$

c) 1

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{spur}(M) = n - k.$$

29. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz-Kovarianz Matrix des LS-Schätzers $\hat{\beta}$ im linearen Modell $y = X\beta + u$ unter den Standardannahmen. Erklren Sie, wo diese Annahmen verwendet werden. 1

30. Bestimmen Sie unter Verwendung von Aufgabe 29 den Erwartungswert der Varianzschätzers 1

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-k)} \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$$

im linearen Modell $y = X\beta + u$ unter den Standardannahmen.

31. Zeigen Sie im Modell $y = X\beta + u$ die Beziehung 2

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2 = \sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2 + \sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2$$

unter der Annahme, dass X den Spaltenvektor $(1, ..., 1)'$ enthält.

V. Normalverteilung und Lineare Transformationen

32. Sei $Z \sim N(0, I_2)$ bivariat normalverteilt, und sei a ein 1×2–Zeilenvektor, $a \neq (0,0)'$. Geben Sie die Verteilung von aZ an. Besitzt aZ eine Dichte? Was erhlt man speziell für $a = (1,0)'$. 1

33. Sei $Z \sim N(0, I_2)$ bivariat normalverteilt, und sei A eine 2×2-Matrix mit vollem Rang. Geben Sie die Verteilung und (durch Einsetzen in die Formel) auch die Dichte von AZ an, und zwar für

    a) 1

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

    b) 1

    $$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

34. Zeigen Sie, dass jede Varianz/Kovarianz Matrix symmetrisch und nichtnegativ definit ist. 2

35. Sei Z eine auf $\mathbb{R}^n$ normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 (der Null-Vektor) und Varianz-Kovarianz Matrix Σ; d.h. $Z \sim N(0, \Sigma)$. Zeigen Sie: Ist Σ regulär, so existiert eine reguläre $n \times n$-Matrix S, sodaß $S^{-1}Z \sim N(0, I_n)$. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 23.) 2

36. Es sei $Z = (Z_1, Z_2)$ ein bivariat normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswert (μ_1, μ_2) und VC-Matrix $\sum$. Zeigen Sie, dass, sofern Z_1 und Z_2 unkorreliert sind, diese auch unabhängig sind. 2

37. Gegeben sei folgende reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \exp^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{falls } x > 0,\ y > 0 \text{ oder } x < 0,\ y < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f(x,y)$ ist eine Dichte auf $\mathbb{R}^2$; d.h. $f(x,y)$ ist nicht-negativ, und $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. Verwenden Sie dazu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{s^2}{2}}\, ds = 1$. 1

b) Ist $W = (W_x, W_y)$ eine bivariate Zufallsvariable mit der Dichte $f(x,y)$, so sind W_x und W_y normalverteilt. 1

c) Ist $W = (W_x, W_y)$ eine bivariate Zufallsvariable mit der Dichte $f(x,y)$, so sind W_x und W_y unkorreliert aber nicht unabhängig. 2

VI. Statistische Hypothesen

38. Betrachten Sie das Modell $Y = X\beta + u$ mit $\beta \in \mathbb{R}^k$ und Stichprobengrösse n unter den Standardannahmen. Es sei $\hat{\beta}$ der LS-Schätzer aus diesem Modell und es sei β^* der restringierte LS-Schätzer unter der Restriktion $R\beta = r$. Dabei sei R eine $(q \times k)$–Matrix vom Rang q, und r ein q–Vektor. Entsprechend sei $\hat{u} = Y - X\hat{\beta}$ der Vektor der unrestringierten Residuen und RSS deren Quadratsumme, sowie $u^* = Y - X\beta^*$ der Vektor der restringierten Residuen und RSS* deren Quadratsumme. Zeigen Sie:

a) $u^* = \hat{u} + X(\hat{\beta} - \beta^*)$. 1

b) $u^{*\prime} u^* = \hat{u}'\hat{u} + (\hat{\beta} - \beta^*)X'X(\hat{\beta} - \beta^*)$ 1

c) Die F-Statistik zum Testen der Hypothese $H_0 : R\beta = r$ lässt sich 2
schreiben als
$$F = \frac{\text{RSS}^* - \text{RSS}}{\text{RSS}} \cdot \frac{n-k}{q}.$$

39. Die Einfuhr von Ceylontee in die USA wird durch folgende Gleichung 1
modelliert:

$$\log Q = \beta_0 + \beta_1 \log P_C + \beta_2 \log P_I + \beta_3 \log P_B + \beta_4 \log Y + u,$$

wobei

- Q die Importe von Ceylontee in die USA,
- P_C den Preis von Ceylontee,
- P_I den Preis von Indischem Tee,
- P_B den Preis von Brasilianischem Kaffee, und
- Y das verfügbare Einkommen

bezeichnen. Aus $n = 22$ Beobachtungen ergaben sich folgende OLS Schätzer:

- Unter der Hypothese H_0: $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$ ergeben sich die restringierten Schätzer $\beta_0^* = -0.738$ (0.820), $\beta_3^* = 0.199$ (0.155), und $\beta_4^* = 0.261$ (0.165), wobei die Zahlen in Klammer die geschätzten Standardabweichungen angeben. Die Residuenquadratsumme im restringierten Modell beträgt RSS$^* = 0.6788$.

- Unter der Alternativhypothese H_1 ergeben sich die unrestringierten Schätzer $\hat{\beta}_0 = 2.837$ (2.000), $\hat{\beta}_1 = -1.481$ (0.987), $\hat{\beta}_2 = 1.181$ (0.690), $\hat{\beta}_3 = 0.186$ (0.134), und $\hat{\beta}_4 = 0.257$ (0.370). Die Residuenquadratsumme im unrestringierten Modell beträgt RSS $= 0.4277$.

Testen Sie die Hypothese H_0 gegen H_1 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ und diskutieren Sie die 'ökonomischen Implikation' des Ergebnisses.

40. In der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $Y = \gamma A^\alpha K^\beta$ ist von Interesse, ob $\alpha + \beta > 1$ ist („zunehmende Skalenerträge"). Nach einer logarithmischen Transformation gelangen wir zu einer linearen Funktion $\log Y = \log \gamma + \alpha \log A + \beta \log K$. Mit Hilfe von Querschnitts- oder Zeitreihendaten können nun α und β geschätzt werden und anschließend die Linearkombination $\alpha + \beta$. Erhält man $\hat{\alpha} + \hat{\beta} > 1$, so ist das nicht unbedingt ein Indiz dafür, dass wirklich $\alpha + \beta > 1$ ist. Vielmehr muß $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ signifikant größer als Eins sein. Das aber kann nur geprüft werden, wenn die Varianz von $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ bekannt ist. Man berechne die Varianz von $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ und entwickle daraus einen Test für die Hypothese $H_0 : \alpha + \beta = 1$, unter der Annahme, dass die Meßwerte $\log Y$ mit i.i.d. $N(0, \sigma^2)$-verteilten Fehlern behaftet sind. 2